

key words

Bio-hydrogen

Bio-reactor

Process control

Feedback linearization

Global linearized control

Substrate concentration control in a bio-reactor for bio-hydrogen production via feedback linearization

Saeed Fallah Ramezani¹, Mohammad Fakhroleslam^{*,2}

1- Chemical and Petroleum Engineering Department, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

2- Process Engineering Department, Faculty of Chemical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

Abstract

Research subject: Bio-hydrogen is a renewable energy source with many economic and environmental benefits as a fuel. Controlling the concentration of the substrate in the reactor has a significant effect on the amount of hydrogen production. However, bio-hydrogen production is a nonlinear process that requires the implementation of nonlinear control methods. In this paper, substrate concentration in an anaerobic bio-reactor is controlled using the feedback linearization method.

Research approach: The model employed for the simulation is a well-known model consisting of three state variables. The proposed controller is a globally linearized controller (GLC) designed based on the feedback linearization technique. In this method, the nonlinear system is precisely linearized by a transformation of the coordinate system. As a result, the linearized system can be controlled using a linear controller. In order to linearize the system, a nonlinear compensator is designed using the design model and applying the concepts of differential geometry. Proportional-integral (PI) controller is adopted as a linear controller. GLC controller performance has been compared with a nonlinear controller (NC) and a PI controller. The performance of these controllers has been studied by numerical simulation based on the integral of time-square error (ITSE).

Main results: The simulation results show that substrate concentration control can contribute to the hydrogen production. The control method applied has better set-point tracking than the other two control approaches. The ITSE performance index for the feedback linearization method is lower than the other two methods. The nonlinear feedback controller fails if the kinetic parameters are changed by 25%, but the PI method and the feedback linearization are robust against model uncertainty. An efficient controller guarantees stable bio-hydrogen production. Comparing open-loop and closed-loop simulation results shows that controlling the substrate concentration increases hydrogen production by 90%.

*To whom correspondence should be addressed:
fakhroleslam@modares.ac.ir

کنترل غلظت سوپسترا در یک واکنشگاه زیستی تولید هیدروژن با روش خطی‌سازی پسخور

سعید فلاح رضائی^۱، محمد فخرالاسلام^{۲*}

۱- دانشکده مهندسی شیمی و نفت، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران
۲- گروه فرایند، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده

موضوع: هیدروژن زیستی، منبع انرژی تجدیدپذیری است که استفاده از آن به عنوان سوخت، مزایای اقتصادی و محیط‌زیستی زیادی دارد. کنترل غلظت سوپسترا در واکنشگاه، تأثیر چشم‌گیری بر میزان تولید هیدروژن دارد. فرایند تولید هیدروژن زیستی، پیچیده و غیرخطی است که کنترل آن مستلزم به‌کارگیری روش‌های کنترل غیرخطی است. در این مقاله به کنترل غلظت سوپسترا در واکنشگاه بی‌هوازی تولید هیدروژن با استفاده از روش خطی‌سازی پسخور پرداخته شده است.

روش تحقیق: مدل مورد استفاده برای شبیه‌سازی، مدل شناخته‌شده‌ای متشکل از سه متغیر حالت است. کنترل‌کننده پیشنهادی، کنترل‌کننده خطی‌سازی شده کلی (GLC) است که بر اساس روش خطی‌سازی پسخور (Feedback linearization) طراحی می‌شود. در این روش، سامانه غیرخطی از طریق انتقال دستگاه مختصات، به‌طور دقیق خطی‌سازی می‌شود. بنابراین، می‌توان سامانه خطی‌سازی شده را با استفاده از کنترل‌کننده خطی کنترل کرد. به‌منظور خطی‌سازی سامانه، با استفاده از مدل ارائه‌شده برای این فرایند و با به‌کارگیری مفاهیم هندسه دیفرانسیلی جبران‌کننده غیرخطی طراحی شده است. در صورت به‌کارگیری جبران‌کننده غیرخطی، می‌توان از کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی (PI) به‌عنوان کنترل‌کننده خطی استفاده کرد. عملکرد کنترل‌کننده GLC+PI در کنترل فرایند مذکور، در مقایسه با کنترل‌کننده غیرخطی (NC) و کنترل‌کننده PI، مورد سنجش قرار گرفته است. عملکرد کنترل‌کننده‌های مذکور با شبیه‌سازی عددی و بر اساس شاخص انتگرال زمان در مربع خطا (ITSE) مطالعه شده است.

نتایج اصلی: نتایج شبیه‌سازی حاکی از این هستند که کنترل غلظت سوپسترا در این فرایند، به‌طور کلی، باعث افزایش مقدار تولید هیدروژن می‌شود. روش پیشنهادی در این مقاله (GLC+PI) برای کنترل غلظت سوپسترا در واکنشگاه زیستی تولید هیدروژن، در مقایسه با کنترل‌کننده‌های NC و PI، عملکرد بهتری در تعقیب مقدار مقرر دارد. در صورت تغییر ۲۵ درصدی پارامترهای سینتیکی، عملکرد NC مختل می‌شود، اما روش‌های PI و GLC+PI در برابر این مقدار عدم قطعیت مقاوم هستند. عملکرد مناسب کنترل‌کننده می‌تواند تولید پایدار هیدروژن را تضمین کند. مقایسه نتایج شبیه‌سازی در حالت حلقه‌باز و حلقه‌بسته نشان می‌دهد که کنترل غلظت سوپسترا باعث افزایش ۹۰ درصدی تولید هیدروژن می‌شود.

کلمات کلیدی

هیدروژن زیستی

واکنشگاه زیستی

کنترل فرایند

خطی‌سازی پسخور

کنترل خطی‌سازی شده کلی

*مسئول مکاتبات:

fakhroleslam@modares.ac.ir

۱ مقدمه

بر اساس پیش‌بینی‌ها، افزایش مصرف انرژی منجر به از بین رفتن منابع محدود انرژی فسیلی خواهد شد. استفاده از سوخت‌های فسیلی، عامل اصلی گرمایش زمین است [۱]. بنابراین، توسعه استفاده از منابع انرژی تجدیدپذیر نظر پژوهشگران را به خود جلب کرده است. هیدروژن، حامل انرژی‌ای است که یکی از روش‌های متداول تولید آن، فرآوری فیزیکی-شیمیایی سوخت‌های فسیلی است [۲]. امروزه روش‌های صنعتی متداول برای تولید هیدروژن، سازگاری زیادی با محیط زیست ندارند. اما هیدروژن زیستی، منبع انرژی‌ای سازگار با محیط‌زیست و سوختی تجدیدپذیر است. تولید هیدروژن زیستی، وابسته به منابع سوخت‌های فسیلی نیست و به همین دلیل استفاده از آن می‌تواند منجر به کاهش انتشار گازهای گلخانه‌ای شود. روش‌های تولید هیدروژن زیستی، شامل نورکافت، تخمیر در تاریکی، تخمیر در نور و پیل‌های الکترولیز میکروبی هستند [۳-۵]. در این میان، فرایند تخمیر در نور به دلیل نرخ بالای تبدیل سوبسترا، عدم مزاحمت اکسیژن، به کارگیری دامنه وسیعی از امواج نوری و امکان استفاده از پسماندهای آلی، بیش از سایر روش‌ها مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است [۱]. در فرایند تولید هیدروژن به روش تخمیر، مواد آلی تجزیه می‌شوند و مقدار قابل توجهی هیدروژن تولید می‌شود [۶].

با وجود ارائه روش‌های مختلف برای تولید هیدروژن زیستی، هنوز مسیری طولانی برای تولید هیدروژن زیستی در مقیاس بزرگ در پیش است. کیفیت، کمیت و اقتصاد این فرایندها به پاسخ‌گذا و حالت پایای آن‌ها بستگی دارد [۷]. علاوه بر این، هزینه بالای تولید و بهره‌پایین واکنش، دو مانع اصلی تجاری‌سازی فرایندهای زیستی برای تولید هیدروژن هستند [۸]. بهره‌واکنش به شدت تابع شرایط عملیاتی است و می‌تواند با کنترل شرایط عملیاتی حول شرایط بهینه، بهبود داده شود. یکی از مهم‌ترین شرایط عملیاتی در تولید هیدروژن زیستی به صورت بی‌هوازی، غلظت سوبسترا است. در یک پژوهش، نشان داده شده است که غلظت سوبسترا تأثیر چشمگیری بر نرخ تولید هیدروژن دارد [۸، ۹]. همچنین، غلظت سوبسترا در فرایندهای مختلف زیستی، در مقدار مشخص باعث افزایش بهره‌وری می‌شود. به عنوان مثال، شرایط عملیاتی بهینه برای تولید بیشترین مقدار ممکن هیدروژن در فرایند تخمیر بی‌هوازی پساب به این شرح هستند: مقدار pH معادل ۶/۵ و غلظت سوبسترا برابر با ۵ g/L [۱۰].

کنترل شرایط عملیاتی واکنشگاه‌های زیستی به صورت دستی، کاری پرهزینه و زمان‌بر است. علاوه بر این، پیچیدگی‌های واکنشگاه‌های زیستی، نه تنها باعث انحراف شرایط عملیاتی از شرایط بهینه می‌شود، بلکه

ممکن است به ناپایداری سامانه نیز ختم شود [۷]. [۱۱]. بنابراین، به کارگیری روش کنترل مناسب برای تولید هیدروژن زیستی در مقیاس بزرگ، ضروری است. در میان روش‌های مختلف کنترل فرایندها، روش‌های خطی از سادگی برخوردار هستند. با این وجود، کنترل‌کننده‌های خطی باید حول نقطه خاصی به کار گرفته شوند. در غیر این صورت، ممکن است ناپایدار شوند. از سوی دیگر، روش‌های کنترل غیرخطی در دامنه وسیع‌تری می‌توانند به کار گرفته شوند، اما اثبات پایداری آن‌ها چالش‌برانگیز است. نشان داده شده است که کنترل غیرخطی پسخور می‌تواند باعث افزایش میزان تولید هیدروژن زیستی در واکنشگاه بی‌هوازی شود [۱۲]. پژوهشگران نشان داده‌اند که استفاده از روش کنترل پیش‌بین مدل در واکنشگاه پیوسته، میزان تولید هیدروژن زیستی از شیر قند را تا ۷۵٪ افزایش می‌دهد. در پژوهش مذکور از جریان خوراک به عنوان متغیر کنترل‌کننده استفاده شده است و متغیرهای حالت با استفاده از مشاهده‌گر (Observer) تخمین زده می‌شوند [۱۳]. هانگ و همکاران با به کارگیری منطق فازی و با استفاده از دما و pH به عنوان متغیرهای کنترل‌کننده، فرایند تولید هیدروژن زیستی در واکنشگاه پیوسته را کنترل کردند و با موفقیت تولید هیدروژن را افزایش دادند [۱۴]. در پژوهشی دیگر، کنترل‌کننده با بهره زیاد با موفقیت در فرایند تولید هیدروژن زیستی پیاده‌سازی شده است [۱۵]. در سامانه کنترل مذکور، با اندازه‌گیری غلظت هیدروژن در فاز گاز، COD جریان مایع کنترل می‌شود. تعدادی از پژوهشگران با به کارگیری روش کنترل پسخور مبتنی بر مدل، نشان دادند که شناسایی برخط پارامترهای مدل می‌تواند با حفظ پایداری سامانه، زمان واکنش را در فرایند تولید هیدروژن به صورت ناپیوسته از پسماندهای آلی کاهش دهد [۱۶]. با توجه به غیرخطی بودن سامانه‌هایی که با موجودات زنده سروکار دارند، استفاده از روش کنترل غیرخطی مبتنی بر مدل برای کنترل شرایط عملیاتی فرایند تولید هیدروژن در واکنشگاه زیستی، ضروری به نظر می‌رسد.

در این مقاله، فرایند تولید هیدروژن زیستی در واکنشگاه پیوسته بی‌هوازی توضیح داده شده و مبانی نظری مدلسازی واکنشگاه و روش‌های کنترل غلظت سوبسترا بیان می‌شوند. به منظور غلبه بر رفتارهای غیرخطی این واکنشگاه، با استفاده از روش خطی‌سازی پسخور (Feedback Linearization) کنترل‌کننده خطی‌سازی شده کلی (Globally Linearized Controller, GLC) برای کنترل غلظت سوبسترا طراحی شده است. عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، از طریق شبیه‌سازی عددی با عملکرد کنترل‌کننده متداول (PI) و کنترل‌کننده پیشرفته غیرخطی مورد مقایسه قرار گرفته است.

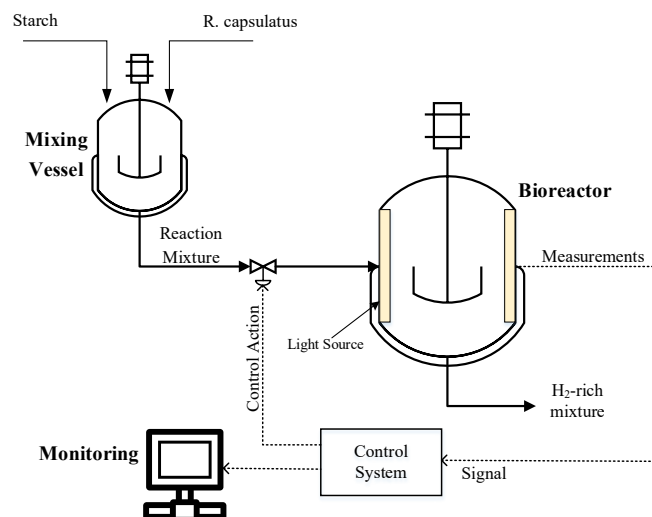
۲ مبانی نظری

۲-۱ مدل سازی واکنشگاه زیستی

فرایند تخمیر بی‌هوازی عبارت است از فرایند هضم سوپسترا در غیاب هوا توسط ریزاندامگانی (Microorganism) که منجر به تغییر ساختار مولکولی و تشکیل مواد جدید می‌شود. این فرایند، به صورت صنعتی در واکنشگاه زیستی انجام می‌شود. معمولاً برای اطمینان از کیفیت مناسب خوراک واکنشگاه، مخلوط واکنش در محفظه همزن‌دار آماده‌سازی می‌شود. در صورتی که تخمیر به نور نیاز داشته

اندازه‌گیری شده و سیگنال مربوطه به کنترل‌کننده ارسال می‌شود. کنترل‌کننده سیگنال مناسب را به عملگر (شیر کنترل) ارسال می‌کند. همچنین، متغیرهای مختلف سامانه مثل متغیر کنترل‌شونده و متغیر کنترل‌کننده از طریق رابط کاربری نمایش داده می‌شوند.

مدل ریاضیاتی مورد استفاده در این پژوهش، بر اساس مدل سازی فیزیکی فرایند تولید هیدروژن زیستی از طریق تخمیر با رودوباکتر کپسولاتوس در نور به دست آمده است [۱۹]. رفتار دینامیکی فرایند، با برقراری



شکل ۱ نمودار جریان فرایند تولید هیدروژن زیستی و سامانه کنترل آن

Figure -1 Flow diagram of the bio-hydrogen production process and its control system

موازنه جرم، به صورت معادلات ۱ تا ۴ حاصل می‌شود. متغیرهای حالت (State Variables) در این سامانه شامل غلظت سوپسترا (S)، غلظت زیست‌توده (X) و حجم هیدروژن تولیدی (H_p) است.

$$\frac{dS}{dt} = D(S_m - S) - \frac{1}{Y_{xs}} \mu(S)X \quad (۱)$$

$$\frac{dX}{dt} = -DX + \mu(S)X \quad (۲)$$

که نرخ رقیق‌سازی، غلظت سوپسترای ورودی و ضریب بهره زیست‌توده-سوپسترا است. نرخ رشد سلول است و از معادله مونود (Monod) به دست می‌آید. علت استفاده از معادله مونود برای مدل‌سازی رشد سلولی، انطباق بیشتر این مدل با داده‌های آزمایشگاهی در مقایسه با مدل میکائیلیس-منتن (Michaelis-Menten) است [۱۹-۲۱].

$$\mu(S) = \mu_{\max} \frac{S}{K_s + S} \quad (۳)$$

در این معادله، نرخ رشد سلولی بیشینه و ثابت اشباع سوپسترا است. مقدار هیدروژن تولیدشده را می‌توان

باشد، از نور خورشید و در صورت لزوم از لامپ‌های LED برای جبران کمبود نور خورشید استفاده می‌شود [۱۷]. نمودار ساده‌ای از این فرایند در شکل ۱ نشان داده شده است.

سوپسترا در این پژوهش، نشاسته و ریزاندامگان مورد نظر رودوباکتر کپسولاتوس (R. capsulatus) است. فرایند ارائه‌شده در شکل ۱، پیوسته است. در این فرایند، ابتدا مخلوط سوپسترا و ریزاندامگان در مخزن اختلاط آماده‌سازی می‌شوند. سپس، مخلوط واکنش به‌طور پیوسته به واکنشگاه زیستی منتقل می‌شود. در واکنشگاه، با ایجاد شرایط عملیاتی مناسب برای انجام واکنش‌های زیستی، مثل غلظت سوپسترا و تنظیم شدت نور، واکنش زیستی انجام می‌شود. این واکنشگاه مجهز به همزن است، زیرا یکنواختی مخلوط واکنش، باعث افزایش تولید هیدروژن می‌شود [۱۸]. محصول واکنش که غنی از گاز هیدروژن است، به صورت پیوسته از واکنشگاه خارج می‌شود. دبی جریان خوراک و به دنبال آن نرخ رقیق‌سازی، توسط شیر کنترل نصب‌شده روی آن تنظیم می‌شود. با تغییر وضعیت شیر کنترل مذکور، می‌توان غلظت سوپسترا در واکنشگاه را کنترل کرد. برای کنترل این فرایند، متغیر کنترل‌شونده

با استفاده از معادله لودکینگ-پیرت (Ludeking-Piret) به دست آورد:

$$\frac{dH_2}{dt} = -DH_2 + \gamma\mu(S)X + \delta X \quad (4)$$

که و اعداد ثابت هستند. مقادیر پارامترهای مدل در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. اعتبارسنجی این مدل با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی در پژوهش‌های متعددی انجام شده است [۱۹، ۲۰]. نتایج این پژوهش‌ها حاکی از دقت مناسب مدل مذکور در پیش‌بینی رفتار سامانه است.

کنترل‌کننده تنظیم‌شده، تنها حول نقطه کاری مطلوب است و با انحراف سامانه از نقطه خطی‌سازی، امکان ناپایداری سامانه وجود دارد. روش خطی‌سازی دقیق که مبتنی بر مبانی هندسه دیفرانسیلی است، راه حل مطمئن‌تری برای به‌کارگیری کنترل‌کننده‌های خطی در سامانه‌های غیرخطی است. در این روش، با انتقال دستگاه مختصات سامانه غیرخطی به فضای جدید، سامانه به صورت دقیق خطی می‌شود. با توجه به اینکه این نوع خطی‌سازی دقیق است، می‌توان در تمامی نقاط بدون مشکل از کنترل‌کننده‌های خطی استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است،

جدول ۱ مقدار پارامترهای مدل واکنشگاه بی‌هوازی برای تولید هیدروژن
Table 1 Parameters values of the anaerobic reactor model for hydrogen production

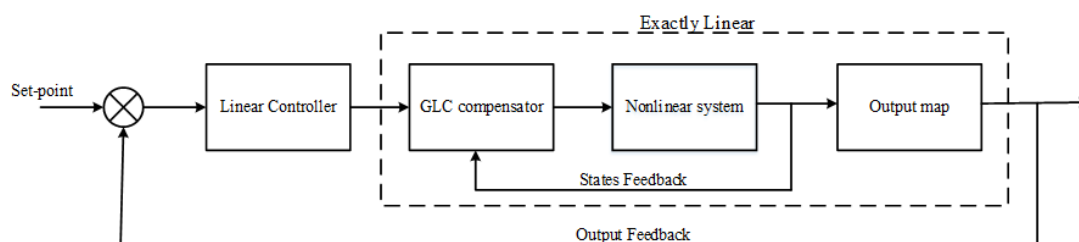
Parameter	Value
$\mu_{\max}$	0.4 1/h
K_s	10 g/L
S_{in}	10 g/L
Y_{xs}	0.7 g/g
γ	5
δ	16 1/h

در این روش به کمک جبران‌کننده غیرخطی، سامانه از ورودی تا خروجی خطی‌سازی می‌شود.

در این بخش، مبانی نظری خطی‌سازی پس‌خور برای کنترل غلظت سوپسترا در واکنشگاه زیستی بیان می‌شوند. روش خطی‌سازی پس‌خور، مبتنی بر مبانی هندسه دیفرانسیلی است. به همین دلیل، بعضی از مفاهیم مهم هندسه دیفرانسیلی در ادامه به‌طور خلاصه بیان می‌شوند.

۲-۲ خطی‌سازی کلی پس‌خور

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، کنترل‌کننده‌های خطی از مزایایی همچون حجم محاسبات کم و سادگی تنظیم برخوردار هستند. این مزایا کنترل‌کننده‌های خطی مثل PI را به متداول‌ترین کنترل‌کننده‌های صنعتی تبدیل کرده است. با این حال، برای سامانه‌های غیرخطی همچون



شکل ۲ نمودار بلوکی کنترل سامانه غیرخطی با خطی‌سازی کلی پس‌خور و استفاده از کنترل‌کننده خطی
Figure 2 Feedback linearization block diagram

مشتق لی (Lie derivative): مشتق، میدان اسکالر پیوسته‌ای روی میدان برداری است که به صورت یا نشان داده شده و از رابطه ۵ به دست می‌آید [۲۲]:

$$L_f h = \langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (5)$$

مشتق لی در حالت خاص می‌تواند مشتق میدان

سامانه‌های زیستی نمی‌توان از کنترل‌کننده‌های خطی استفاده کرد، چرا که ممکن است منجر به ناپایداری سامانه شوند. خطی‌سازی، راه حل متداولی است که امکان استفاده از کنترل‌کننده‌های خطی برای سامانه‌های غیرخطی را فراهم می‌آورد. خطی‌سازی تقریبی، مثلاً با استفاده از سری تیلور، یک راه برای تنظیم کنترل‌کننده‌های خطی است؛ اما عملکرد

$$v = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h u \quad (11)$$

و به سامانه‌ای با مرتبه کاهش یافته تبدیل می‌شود. سامانه خطی سازی شده به صورت معادله ۱۲ است.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (12)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] z$$

که تابع انتقال آن در فضای s به صورت معادله ۱۳ است.

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r} \quad (13)$$

با توجه به خطی بودن سامانه در این حالت، می‌توان از کنترل کننده خطی متداول مثل PI برای کنترل سامانه استفاده کرد.

با توجه به مدل ارائه شده برای واکنشگاه زیستی (معادلات ۱ تا ۴)، متغیرهای حالت این سامانه $X = [S \ X \ H_2]$ ، ورودی سامانه $U = D$ و خروجی سامانه $y = S$ است. توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در این فرایند به صورت معادلات ۱۴ تا ۱۶ هستند:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{xs}} \mu(S) X \\ \mu(S) X \\ \frac{1}{Y_{xH}} \varphi(I) \mu(S) X + \delta X \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} S_m - S \\ -X \\ -H_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$h(x) = S \quad (16)$$

بردار انتقال به فرم نرمال، به صورت معادله ۱۷ حاصل می‌شود:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \frac{S-10}{H_2+10} H_{2,0} \\ \frac{X}{H_2} H_{2,0} \\ S \end{bmatrix} \quad (17)$$

در معادله ۱۷ نشان دهنده حجم اولیه هیدروژن در

اسکالر پیوسته‌ای روی باشد. بنابراین، مشتق لی مراتب بالاتر به صورت معادله ۶ قابل تعریف هستند:

$$L_f^k h = L_f L_f^{k-1} h \quad (6)$$

مرتبه نسبی (Relative degree): سامانه غیرخطی یک ورودی-یک خروجی نشان داده شده در معادله ۷ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (7)$$

که بردار متغیرهای حالت، ورودی سامانه، خروجی سامانه و توابع، و میدان‌های برداری پیوسته هستند. مرتبه نسبی این سامانه برابر با است، اگر یک مجموعه مثل پیدا شود؛ به طوری که برای شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h &= 0 \\ L_g L_f^{r-1} h &\neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

برای سامانه غیرخطی با مرتبه نسبی، بردار انتقال معکوس پذیر به صورت معادلات ۹ قابل تعریف است [۲۲]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \Phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x) \\ L_g \Phi_i(x) &= 0 \quad i = r+1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

در دستگاه مختصات جدید، سامانه به شکل نرمال بیرن-ایزیدوری (Byrne-Isidory) (معادلات ۱۰) منتقل شده است:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \\ \dot{z}_i &= L_f \Phi_{r+i}(x), \quad i = 1, \dots, n-r \end{aligned} \quad (10)$$

دینامیک صفر (Zero dynamics): دینامیک صفر سامانه غیرخطی، از برابر قرار دادن خروجی سامانه با صفر در شکل نرمال به دست می‌آید. سامانه غیرخطی، مینیمم فاز است، اگر دینامیک صفر آن پایدار باشد. سامانه غیرخطی را می‌توان به طور دقیق خطی سازی کرد، اگر و تنها اگر مینیمم فاز باشد و برقرار باشد. در صورت برقراری این شرط، سامانه از طریق جبران کننده زیر (معادله ۱۱) به صورت ورودی-خروجی خطی سازی می‌شود [۲۲]:

پژوهش از کنترل کننده تناسبی-انتگرالی (PI) به عنوان کنترل کننده خطی استفاده می شود. پارامترهای تنظیم در کنترل کننده خطی سازی شده شامل پارامترهای کنترل کننده PI و پارامتر در رابطه ۲۳ است. در ادامه، عملکرد کنترل کننده طراحی شده با عملکرد کنترل کننده PI و کنترل کننده غیرخطی پسخور [۹] مورد مقایسه قرار گرفته است. رابطه کنترل کننده PI به صورت معادله ۲۴ است:

$$u = k_p e + k_I \int e dt \quad (24)$$

که و به ترتیب پارامترهای تناسبی و انتگرالی کنترل کننده PI هستند. رابطه کنترل کننده غیرخطی پسخور (NC) [۹] به صورت معادله ۲۵ است:

$$u = k_1 (e^2 - k_2) \quad (25)$$

در دو معادله فوق نشان دهنده خطای کنترل است. مبنای انتخاب رابطه ۲۵ به عنوان کنترل کننده غیرخطی، تضمین پایداری آن بر اساس نامساوی کوشی-شوارتز (Cauchy-Schwartz) است. البته به دلیل نداشتن عبارت انتگرال گیر در این کنترل کننده، خطای ماندگار وجود خواهد داشت.

پارامترهای کنترل کننده های مذکور باید به صورتی تنظیم شوند که کنترل کننده ها عملکرد خوبی داشته باشند. پارامترهای کنترل کننده GLC+PI و کنترل کننده PI از طریق بهینه سازی با استفاده از تابع هدف شاخص عملکرد انتگرال زمان در مربع خطا (Integral of time squared error) که با ITSE نشان داده می شود، تنظیم شده اند. مسئله بهینه سازی سامانه کنترل خطی سازی شده به صورت معادله ۲۶ و مسئله بهینه سازی کنترل کننده PI به صورت معادله ۲۷ است.

$$\min_{k_p, k_I, \alpha} ITSE = \int_0^t te^2 dt$$

$$s.t. \begin{cases} k_p > 0 \\ k_I > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\min_{k_p, k_I} ITSE = \int_0^t te^2 dt$$

$$s.t. \begin{cases} k_p > 0 \\ k_I > 0 \end{cases} \quad (27)$$

برای حل مسئله های بهینه سازی فوق از الگوریتم جستجوی الگو (Pattern Search) استفاده شده است. برای تنظیم کنترل کننده غیرخطی از پارامترهای ارائه شده توسط گنزالز و همکاران برای همین سامانه

راکتور (۰/۵ mL) است. این بردار انتقال، معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر دینامیک صفر سامانه پایدار باشد. برای به دست آوردن دینامیک صفر، به جای خروجی سامانه، مقدار آن در نقطه تعادل را قرار می دهیم. با این کار، دینامیک صفر سامانه به صورت معادله ۱۸ حاصل می شود:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{4z_2}{77} - \frac{178z_2(z_1 - 10)}{11H_{2,0}} \\ \dot{z}_2 = \frac{2z_2}{55} - \frac{178z_2^2}{11H_{2,0}} \end{cases} \quad (18)$$

پاسخ تحلیلی معادلات دیفرانسیل (۱۳) به صورت معادلات ۱۹ است:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{C_1}{623(445 \exp(C_2 H_{2,0} + \frac{2t}{55}) + 1)} - \frac{2}{623} H_{2,0} + 10 \\ z_2 = \frac{H_{2,0}}{\exp(-H_{2,0}(C_2 + \frac{2t}{55})) + 445} \end{cases} \quad (19)$$

با توجه به اینکه دینامیک صفر در زمان بی نهایت، به مقادیر محدود محاسبه شده در معادلات ۲۰ میل می کند، دینامیک صفر پایدار و سامانه مینیمم فاز است.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = -\frac{2}{623} H_{2,0} + 10 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = \frac{H_{2,0}}{445} \end{cases} \quad (20)$$

بنابراین، بردار انتقال، معکوس پذیر است. معکوس بردار انتقال از رابطه ۲۱ به دست می آید:

$$x = T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_3 \\ \frac{z_3 - 10}{z_1 - 10} z_2 \\ \frac{H_{2,0} z_3 - 10 H_{2,0}}{z_1 - 10} \end{bmatrix} \quad (21)$$

در این حالت، جبران کننده غیرخطی از رابطه ۲۲ تبعیت می کند:

$$u = \frac{v - L_f h - \alpha y}{L_g h} \quad (22)$$

یه این ترتیب، رابطه جبران کننده غیرخطی برای این سامانه به صورت رابطه ۲۳ حاصل می شود:

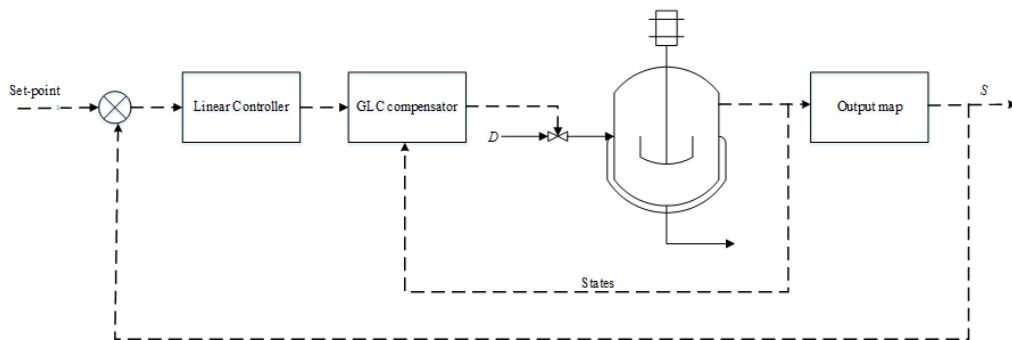
$$u = \frac{v + \frac{4SX}{7(S+10)} - \alpha S}{10 - S} \quad (23)$$

که خروجی کنترل کننده ای خطی است. در این

۳-۱ شبیه‌سازی حلقه‌باز واکنشگاه زیستی بدون استفاده از کنترل‌کننده

همان‌طور که در شکل ۴a مشاهده می‌شود، مقدار اولیه غلظت سوبسترا $4/5 \text{ g/L}$ بوده است. در ابتدای راه‌اندازی، غلظت سوبسترا افزایش پیدا کرده و سپس روند نزولی می‌گیرد و در نهایت در حدود 1 g/L به تعادل می‌رسد. علت این رفتار این است که در ابتدای فرایند، مقدار سوبسترای ورودی به واکنشگاه بیشتر از خروج آن است

استفاده شده است [۹]. به‌صورت ریاضی اثبات می‌شود که اگر و ، آنگاه این کنترل‌کننده به‌صورت مجانبی پایدار است و بهترین عملکرد را خواهد داشت [۹]. در بخش بعد، نتایج شبیه‌سازی واکنشگاه زیستی در سناریوهای تعقیب مقدار مقرر و عدم قطعیت مدل ارائه شده است. در سامانه مورد مطالعه، متغیر کنترل‌شونده غلظت سوبسترا در واکنشگاه (S) و متغیر کنترل‌کننده نرخ رقیق‌سازی (D) است.



شکل ۳ نمودار بلوکی واکنشگاه زیستی تولید هیدروژن در حالت حلقه‌بسته مجهز به کنترل‌کننده غیرخطی (روش خطی‌سازی پس‌خور)
Figure -3 Schematic diagram of the bio-hydrogen production reactor with nonlinear control system (feedback linearization)

و فعالیت زیستی وجود ندارد. با گذشت زمان و تغذیه ریزاندامگان‌ها، مصرف سوبسترا آغاز می‌شود. در نتیجه رشد سلولی صورت گرفته و مصرف سوبسترا تشدید می‌شود. با افزایش مصرف سوبسترا، غلظت آن روند کاهشی به خود می‌گیرد. از سوی دیگر، با شروع فعالیت ریزاندامگان‌ها، تجزیه مواد و به دنبال آن تولید هیدروژن آغاز می‌شود (شکل ۴b). همان‌طور که مشاهده می‌شود، نرخ تولید هیدروژن (شیب منحنی در شکل ۴b) با کاهش غلظت سوبسترا کاهش می‌یابد. در حالت حلقه‌باز، مقدار هیدروژن تولیدشده پس از ۲۵۰ ساعت 2921 mL است (شکل ۴b).

۳-۲ شبیه‌سازی حلقه‌بسته واکنشگاه زیستی مجهز به کنترل‌کننده

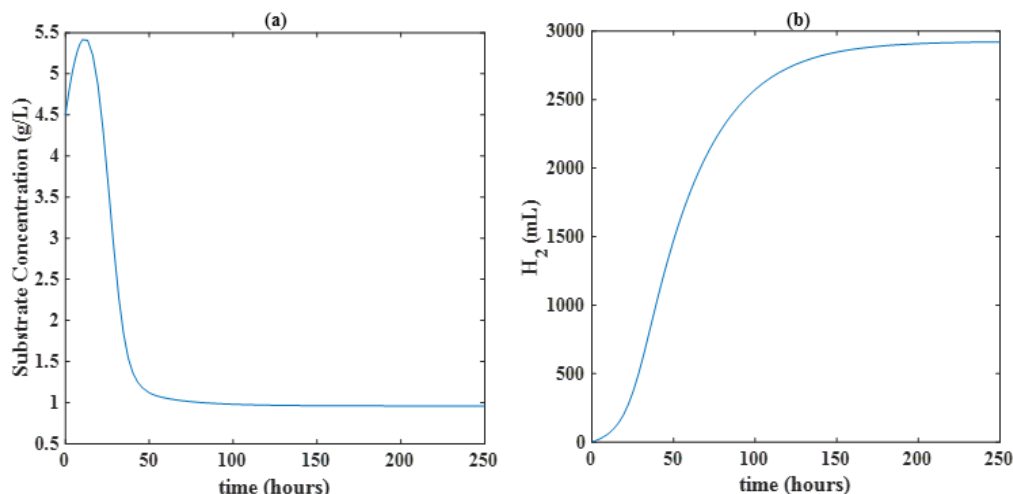
در حالت حلقه‌بسته، کنترل‌کننده سامانه فعال می‌شود و غلظت سوبسترا را به مقدار مشخص شده می‌رساند. به عبارت دیگر، با این کار نقطه تعادل سامانه به گونه‌ای تغییر داده می‌شود که مقدار تولید هیدروژن افزایش یابد. برای اینکه کنترل‌کننده به خوبی این کار را انجام دهد، باید به درستی تنظیم شود. منظور از تنظیم کنترل‌کننده، یافتن مقادیر مناسب برای پارامترهای آن است. همان‌طور که در بخش ۲-۲ توضیح داده شد، در این پژوهش پارامترهای کنترل‌کننده‌های PI و GLC+PI از طریق بهینه‌سازی تابع هدف ITSE و به کمک الگوریتم جستجوی الگو به‌دست آمده‌اند تا بهترین عملکرد ممکن را داشته باشند. مقادیر بهینه کنترل‌کننده‌های مذکور (حاصل از حل مسئله

۳-۲ شبیه‌سازی عددی

به‌منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، واکنشگاه تولید هیدروژن زیستی مجهز به کنترل‌کننده، به‌صورت حلقه‌بسته شبیه‌سازی شده است. نمودار بلوکی واکنشگاه زیستی تولید هیدروژن مجهز به کنترل‌کننده، در شکل ۳ نشان داده شده است. شبیه‌سازی فرایند با حل عددی دستگاه معادلات جبری-دیفرانسیلی (DAE) در محیط سیمولینک (Simulink) نرم‌افزار متلب (MATLAB) انجام شده است. برای حل دستگاه DAE از روابط مشتق‌گیری عددی و الگوریتم آدامز-بشفورث - مولتن (Adams-Bashforth-Moulton) استفاده شده است. این الگوریتم، با بهره‌مندی از خاصیت گام متغیر - مرتبه متغیر (VSVO)، یکی از مناسب‌ترین حل‌کننده‌های سامانه‌های سخت (Stiff) و دستگاه DAE است [۲۳، ۲۴]. سرعت و دقت این الگوریتم در شبیه‌سازی عددی سامانه مذکور در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها مورد بررسی قرار گرفت و معلوم شد عملکرد آن بهتر است. به همین دلیل الگوریتم آدامز-بشفورث - مولتن به‌عنوان الگوریتم شبیه‌سازی انتخاب شده است.

۳ نتایج و بحث

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی واکنشگاه در حالت‌های حلقه‌باز و حلقه‌بسته مورد بررسی قرار گرفته است و عملکرد کنترل‌کننده‌های مختلف با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۴ تغییرات (a) غلظت سوپسترا و (b) مقدار هیدروژن تولیدشده در واکنشگاه زیستی در حالت حلقه باز
Figure 4 Open-loop variations of (a) substrate concentration, and (b) hydrogen volume, in the bioreactor

بهبود بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم جستجوی الگو) در جدول زیر خلاصه شده است. تغییرات غلظت سوپسترا در حالت حلقه بسته در شکل ۵ نشان داده شده است. کنترل کننده در ساعت ۵۰ فعال می‌شود تا ریزاندامگان‌ها فعالیت زیستی خود را آغاز کرده باشند و سامانه به نقطه تعادل نزدیک شود. پس از گذشت زمان مناسب (۵۰ ساعت) کنترل کننده فعال

می‌شود تا غلظت سوپسترا در مقدار بهینه کنترل شود. همان‌طور که در شکل ۵a مشاهده می‌شود، پس از قرارگرفتن سامانه کنترل در حالت حلقه بسته (شروع از ساعت ۵۰)، هر سه کنترل کننده قادر به دنبال کردن مقدار مقرر هستند، اما کنترل کننده GLC+PI عملکرد بهتری دارد، به طوری که شاخص عملکرد ITSE مقدار کمتری در مقایسه با دو کنترل کننده دیگر دارد (شکل ۶). همان‌طور که در شکل ۵b مشاهده می‌شود، با قرار گرفتن سامانه در حالت حلقه بسته، نرخ تولید هیدروژن (شیب منحنی) افزایش پیدا کرده است که اهمیت کنترل فرایند و تأثیر آن بر بهره‌وری را نشان می‌دهد. میزان هیدروژن تولیدشده پس از گذشت ۲۵۰ ساعت از راه‌اندازی واکنشگاه به ۵۵۴۵ mL می‌رسد که حاکی از افزایش ۹۰ درصدی در مقایسه با حالت حلقه باز (شکل

جدول ۲ مقادیر بهینه پارامترهای کنترل کننده‌های PI و GLC+PI
Table 2 Optimal parameters values of PI and GLC+PI controllers

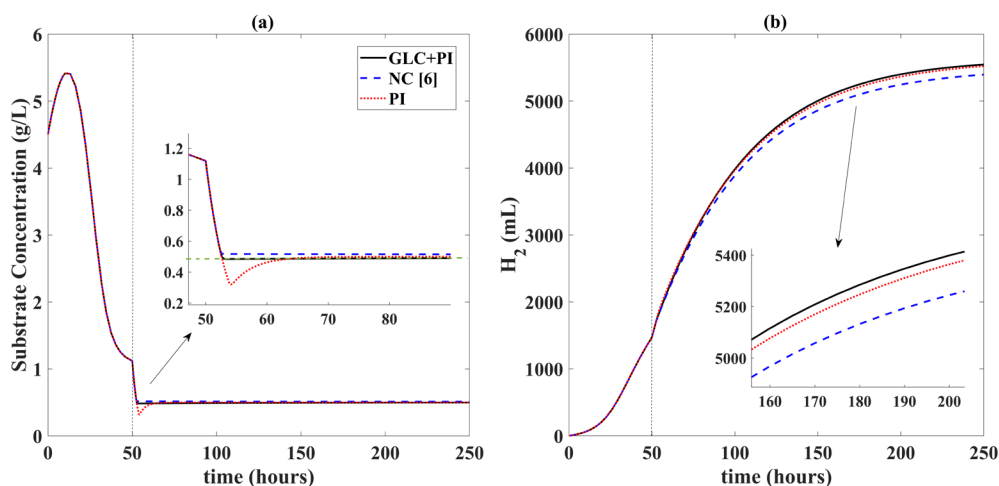
Controller	Parameter	Value
GLC+PI	k_p	5
	k_i	0.0125
	α	0.0625
PI	k_p	0.51
	k_i	0.14

ماندگار جزئی در این کنترل کننده است که از نبود عبارت انتگرال‌گیر در رابطه ۲۵ ناشی می‌شود.

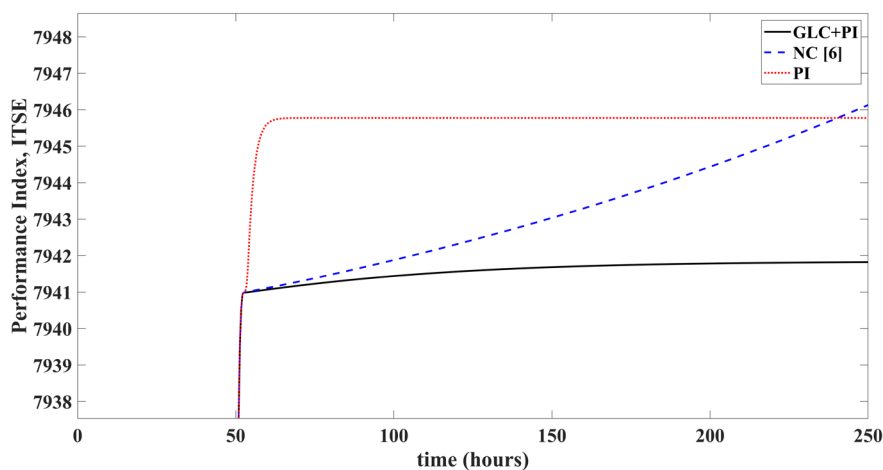
۳-۳ تأثیر عدم قطعیت مدل بر عملکرد کنترل کننده

ارائه مدل ریاضی‌ای که بدون هیچ عدم قطعیتی بیانگر رفتار سامانه باشد، مشکل و حتی گاهی غیرممکن است. عدم قطعیت، می‌تواند پارامتری یا ساختاری باشد. برای این فرایند، احتمال بروز عدم قطعیت پارامتری، خصوصاً در پارامترهای مدل سینتیکی وجود دارد. بنابراین، باید عملکرد کنترل کننده‌ها را با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های احتمالی مدل بررسی کرد. برای این منظور، همه پارامترهای مدل ۲۵٪ تغییر داده شده‌اند، به طوری که اثر یکدیگر را حذف نکنند. عملکرد سه کنترل کننده را با وجود عدم قطعیت پارامتری، در شکل ۷ می‌توان مشاهده کرد. کنترل کننده غیرخطی

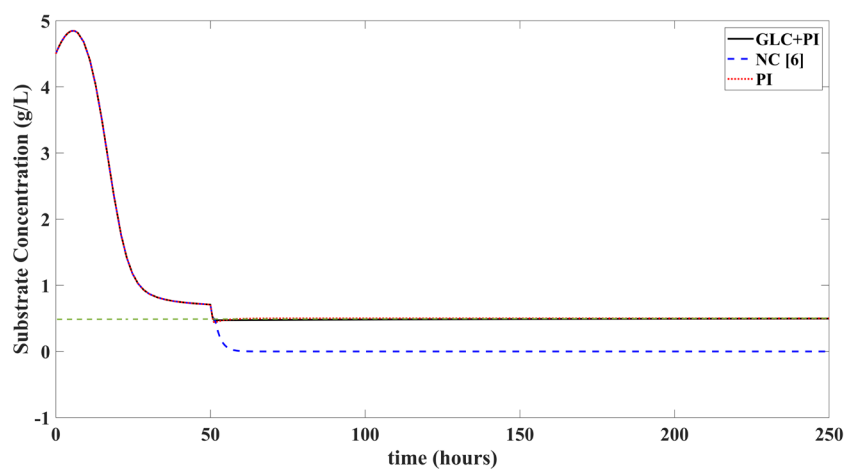
می‌شود تا غلظت سوپسترا در مقدار بهینه کنترل شود. همان‌طور که در شکل ۵a مشاهده می‌شود، پس از قرارگرفتن سامانه کنترل در حالت حلقه بسته (شروع از ساعت ۵۰)، هر سه کنترل کننده قادر به دنبال کردن مقدار مقرر هستند، اما کنترل کننده GLC+PI عملکرد بهتری دارد، به طوری که شاخص عملکرد ITSE مقدار کمتری در مقایسه با دو کنترل کننده دیگر دارد (شکل ۶). همان‌طور که در شکل ۵b مشاهده می‌شود، با قرار گرفتن سامانه در حالت حلقه بسته، نرخ تولید هیدروژن (شیب منحنی) افزایش پیدا کرده است که اهمیت کنترل فرایند و تأثیر آن بر بهره‌وری را نشان می‌دهد. میزان هیدروژن تولیدشده پس از گذشت ۲۵۰ ساعت از راه‌اندازی واکنشگاه به ۵۵۴۵ mL می‌رسد که حاکی از افزایش ۹۰ درصدی در مقایسه با حالت حلقه باز (شکل



شکل ۵ تغییرات (a) غلظت سوبسترا و (b) مقدار هیدروژن تولیدشده در واکنشگاه زیستی در حالت حلقه بسته
Figure -5 Close-loop variations of (a) substrate concentration, and (b) hydrogen volume, in the bioreactor



شکل ۶ مقایسه شاخص عملکرد ITSE برای روش‌های کنترل خطی‌سازی پسخور (GLC+PI)، غیرخطی پسخور (NC) و PI
Figure -6 Comparison of ITSE performance index between GLC+PI, nonlinear control (NC), and PI control strategies



شکل ۷ مقایسه عملکرد روش‌های کنترل خطی‌سازی پسخور (GLC+PI)، غیرخطی پسخور (NC) و PI در حضور عدم قطعیت پارامتری در مدل
Figure -7 Performance comparison of GLC+PI, nonlinear control (NC), and PI strategies in presence of parametric model uncertainty

پیشنهاد شده در [۹] در حضور عدم قطعیت قادر به دنبال کردن مقدار مقرر نیست، اما کنترل کننده PI و روش خطی سازی پسخور در مقابل عدم قطعیت، مقاوم هستند. با وجود اینکه خطی سازی دقیق، روشی مبتنی بر مدل است و عدم قطعیت مدل می تواند آن را با مشکل مواجه کند، اما به کارگیری کنترل کننده PI به عنوان کنترل کننده خطی همراه با GLC باعث مقاوم شدن سامانه GLC+PI می شود.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله به کنترل غلظت سوبسترا در واکنشگاه بی هوازی تولید هیدروژن به روش خطی سازی پسخور پرداخته شد. از طریق شبیه سازی عددی نشان داده شد که به طور کلی، کنترل فرایند بر میزان تولید هیدروژن تأثیر مثبت دارد. در واقع با به کارگیری کنترل کننده، نقطه تعادل سامانه از مقدار خود در حالت حلقه باز به مقدار تعیین شده برای آن منتقل می شود. نقطه تعادل جدید، نقطه ای است که میزان تولید هیدروژن در آن بیشتر است.

نتایج نشان می دهند که کنترل کننده GLC+PI عملکرد بهتری در مقایسه با دو کنترل کننده دیگر دارد. علت برتری این کنترل کننده این است که با انتقال

دستگاه مختصات در این روش، سامانه غیرخطی واکنشگاه زیستی به طور دقیق خطی سازی شده است و سپس از کنترل کننده ای خطی برای کنترل آن استفاده شده است. به این ترتیب، بر رفتارهای غیرخطی سامانه غلبه شده است. همچنین، معلوم شد که کنترل کننده پسخور غیرخطی در برابر عدم قطعیت سامانه مقاوم نیست. با این حال، کنترل کننده GLC+PI قادر است مقادیر مقرر را در حضور عدم قطعیت مدل، به خوبی دنبال کند و شاخص عملکرد ITSE آن در مقایسه با کنترل کننده غیرخطی پسخور (NC) و PI کمتر است. نتایج به دست آمده نشان دادند که روش خطی سازی پسخور، روشی مناسب برای کنترل فرایند تولید هیدروژن زیستی است و می تواند میزان تولید هیدروژن زیستی را در مقایسه با حالت حلقه باز تا ۹۰٪ افزایش دهد. این میزان افزایش تولید گام مهمی در راستای تولید تجاری هیدروژن به این روش است. پیشنهاد می شود در مطالعات آتی، عملکرد این روش در کنترل غلظت سوبسترا در واکنشگاه زیستی، به صورت آزمایشگاهی بررسی شود و امکان افزایش مقیاس این فرایند مورد مطالعه قرار گیرد.

مراجع

- [1] Kumar Gupta S., Kumari S., Reddy K., and Bux F., Trends in Biohydrogen Production: Major Challenges and State-of-the-Art Developments, *Environmental Technology*, 34(13-14). 1653-1670, 2013.
- [2] Kannah R.Y., Kavitha S., Karthikeyan O.P., Kumar G., Dai-Viet N.V., and Banu J.R., Techno-Economic Assessment of Various Hydrogen Production Methods—a Review, *Bioresource Technology*, 319. 124175, 2021.
- [3] Wang H., Xu J., Sheng L., Liu X., Lu Y., and Li W., A Review on Bio-Hydrogen Production Technology, *International Journal of Energy Research*, 42(11). 3442-3453, 2018.
- [4] Nandi R. and Sengupta S., Microbial Production of Hydrogen: An Overview, *Critical Reviews in Microbiology*, 24(1). 61-84, 1998.
- [5] Ferraren-De Cagalitan D. and Abundo M., A Review of Biohydrogen Production Technology for Application Towards Hydrogen Fuel Cells, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 151. 111413, 2021.
- [6] Cieciora-Włoch W., Borowski S., and Otłowska A., Biohydrogen Production from Fruit and Vegetable Waste, Sugar Beet Pulp and Corn Silage Via Dark Fermentation, *Renewable Energy*, 153. 1226-1237, 2020.
- [7] Ritonja J., Implementation of Stir-Speed Adopted Controllers onto a Batch Bioreactor for Improved Fermentation, *IEEE Access*, 9. 16783-16806, 2021.
- [8] Ren N.Q., Guo W.Q., Wang X.J., Xiang W.S., Liu B.F., Wang X.Z., Ding J. and Chen Z.B., Effects of Different Pretreatment Methods on Fermentation Types and Dominant Bacteria for Hydrogen Production, *International Journal of Hydrogen Energy*, 33(16). 4318-4324, 2008.
- [9] Pérez P.A.L., Neria-González M.I., and López R.A., Increasing the Bio-Hydrogen Production in a Continuous Bioreactor Via Nonlinear Feedback Controller, *International Journal of Hydrogen Energy*, 40(48). 17224-17230, 2015.
- [10] Wei J., Liu Z.-T., and Zhang X., Biohydrogen Production from Starch Wastewater and Application in Fuel Cell, *International Journal of Hydrogen Energy*, 35(7). 2949-2952, 2010.
- [11] Kumar S.S., Kumar V.R., and Reddy G.P., Nonlinear Control of Bioreactors with Input Multiplicities—an Experimental Work, *Bioprocess Biosystems Engineering*, 28(1). 45-53, 2005.
- [12] Yang Y., Ren H., Ben-Tzvi P., Yang X., and He Z., Optimal Interval of Periodic Polarity Reversal under Automated Control for Maximizing Hydrogen Production in Microbial Electrolysis Cells, *International Journal of Hydrogen Energy*, 42(31). 20260-20268, 2017.
- [13] Aceves-Lara C.-A., Latrille E., and Steyer J.-P., Optimal Control of Hydrogen Production in a Continuous Anaerobic Fermentation Bioreactor, *International Journal of Hydrogen Energy*, 35(19). 10710-10718, 2010.
- [14] Huang S.-R. et al., Fermentative Hydrogen Production Using a Real-Time Fuzzy Controller, *International Journal of Hydrogen Energy*, 37(20). 15575-15581, 2012.
- [15] Rodríguez J., Ruiz G., Molina F., Roca E., and Lema J., A Hydrogen-Based Variable-Gain Controller for Anaerobic Digestion Processes, *Water Science Technology*, 54(2). 57-62, 2006.
- [16] Jiménez-Ocampo U.E., Santiago S.G., Vargas A., and Moreno-Andrade I., Feedback Control Strategy for Optimizing Biohydrogen Production from Organic Solid Waste in a Discontinuous Process, *International Journal of Hydrogen Energy*, 46(72). 35831-35839, 2021.
- [17] Lu C., Zhang H., Zhang Q., Chu C.Y., Tahir N., Ge X., Jing Y., Hu J., Li Y., Zhang Y. and Zhang T., An Automated Control System for Pilot-Scale Biohydrogen Production: Design, Operation and Validation, *International Journal of Hydrogen Energy*, 45(6). 3795-3806, 2020.
- [18] Lu C., Wang Y., Lee D.J., Zhang Q., Zhang H., Tahir N., Jing Y., Liu H. and Zhang K., Biohydrogen Production in Pilot-Scale Fermenter: Effects of Hydraulic Retention Time and Substrate Concentration, *Journal of Cleaner Production*, 229. 751-760, 2019.
- [19] Obeid J., Magnin J.-P., Flaus J.-M., Adrot O., Willison J.C., and Zlatev R., Modelling of Hydrogen Production in Batch Cultures of the Photosynthetic Bacterium *Rhodobacter Capsulatus*, *International Journal of Hydrogen Energy*, 34(1). 180-185, 2009.
- [20] Nuñez S., Garelli F., and De Battista H., Sliding Mode Observer for Biomass Estimation in a Biohydrogen Production Process, *International Journal of Hydrogen Energy*, 37(13). 10089-10094, 2012.
- [21] Nuñez S., Garelli F., and De Battista H., Second-Order Sliding Mode Observer for

Biomass Concentration and Growth Rate Estimation in Batch Photo-Bioreactors, International Journal of Hydrogen Energy, 39(16). 8772-8779, 2014.

[22] Lien C.-Y. and Wang T.-W., Application of Feedback Linearization to Bioreactor Control, in 1990 American Control Conference, 1990, 2161-2166: IEEE.

[23] Shampine L.F. and Reichelt M.W., The Matlab Ode Suite, SIAM Journal on Scientific Computing, 18(1). 1-22, 1997.

[24] Shampine L.F., Reichelt M.W., and Kierzenka J.A., Solving Index-1 Dae in Matlab and Simulink, SIAM review, 41, 538-552, 1999.